

EDX FP1 / COMPACT REFERENCE

FP1 数学知识清单

楷体 · 双栏 · 公式速查

Further Pure Mathematics 1 | 依据所提供 112 页教辅，按原书八章编排；保留核心定义、定理、运算规则与注意条件。

01 复数

教材 P.5-22

Complex Numbers · basics / Argand / equations

定义与运算 虚数单位 $i^2 = -1$ ； $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$)， $\Re z = a$ ， $\Im z = b$ 。实数是虚部为 0 的复数。

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i$$

设 $z_1 = a + bi$ 、 $z_2 = c + di$ ，则加减按实部和虚部分别计算；乘法先展开，再以 $i^2 = -1$ 化简。

$$\begin{aligned} z_1 \pm z_2 &= (a \pm c) + (b \pm d)i \\ z_1 z_2 &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

共轭与复数除法 $\bar{z} = a - bi$ ；共轭复数的和、积均为实数。

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= 2a, \quad z\bar{z} = a^2 + b^2 \\ \overline{z_1 \pm z_2} &= \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \\ \frac{a + bi}{c + di} &= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} \end{aligned}$$

上式要求 $c + di \neq 0$ ；原则是分子、分母同时乘以分母的共轭，使分母实数化。

阿甘特图 (Argand diagram) 水平为实轴 $\Re$ ，竖直为虚轴 $\Im$ ； $a + bi \leftrightarrow (a, b)$ 。复数也可视为平面位置向量，复数加减对应向量加减。

模与幅角 模长为点到原点的距离；幅角为与正实轴形成的有向角。

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \theta = \arg z \\ \tan \theta &= \frac{b}{a} \quad (a \neq 0) \end{aligned}$$

确定 θ 时须结合象限，不能仅凭反正切； $z = 0$ 的幅角无定义。主幅角通常取 $-\pi < \arg z \leq \pi$ 。

三种表示方式 $r = |z|$ ， $a = r \cos \theta$ ， $b = r \sin \theta$ 。

$$z = a + bi = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$$

极形式运算 $z_j = r_j e^{i\theta_j}$ ($r_j > 0$)：

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \end{aligned}$$

因而模长相乘或相除、幅角相加或相减（幅角相差 $2\pi k$ 视为同一方向）。

复数域中的一元二次方程 对 $az^2 + bz + c = 0$ ($a \neq 0$)，判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ ，使用求根公式

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

当 a, b, c 为实数且 $\Delta < 0$ 时，两个根是非实共轭复数。

实系数方程的共轭根 对实系数多项式 $f(z)$ ，若非实数 $a + bi$ 是根，则 $a - bi$ 也必为根；对应二次因式为

$$(z - a - bi)(z - a + bi) = z^2 - 2az + (a^2 + b^2)$$

二次方程使用求根公式与韦达定理；高次方程利用已知实根/共轭根构造因式，再用多项式除法降次。非实数根按共轭对出现，**重数亦对应**。

辨析 共轭根定理要求多项式各项系数均为实数； $\sqrt{-u} = i\sqrt{u}$ 的实数 u 应满足 $u \geq 0$ 。

02 一元二次方程的根

教材 P.23-31

Roots of Quadratic Equations · Vieta

韦达定理 设 $a \neq 0$ ， $ax^2 + bx + c = 0$ 的根为 α, β （允许复根），则

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

标准化因式 $x^2 - Sx + P = 0$ ；重点是先计算 S, P ，不必先求单独的根。

根的对称式 所有表达式尽量转化为根的和 S 与积 P ：

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= S^2 - 2P \\ \alpha^3 + \beta^3 &= S^3 - 3PS \\ (\alpha - \beta)^2 &= S^2 - 4P \\ \alpha^2 \beta^2 &= P^2, \quad \alpha^3 \beta^3 = P^3 \end{aligned}$$

当 $P \neq 0$ 时：

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} &= \frac{S}{P} \\ \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} &= \frac{S^2 - 2P}{P^2} \end{aligned}$$

构造新的二次方程 将原根变为 $u = g(\alpha, \beta)$ 、 $v = g(\beta, \alpha)$ ，计算新根和 $S' = u + v$ 、新根积 $P' = uv$ ，即得

$$t^2 - S't + P' = 0$$

若需要整数系数，对方程整体乘以合适的非零常数清除分母。

常用新根形式 $u = \alpha^2, v = \beta^2$ 时， $S' = S^2 - 2P$ ， $P' = P^2$ ； $u = \alpha^3, v = \beta^3$ 时， $S' = S^3 - 3PS$ ， $P' = P^3$ ； $u = \alpha^{-1}, v = \beta^{-1}$ 时， $S' = S/P$ ， $P' = 1/P$ （须 $P \neq 0$ ）。

辨析 题目要求整数系数时，须考虑系数整体倍数；原根为复数也不影响韦达定理。

03 方程的数值解

教材 P.32-45

Numerical Solutions of Equations

变号定位 (根的存在性) 若 f 在 $[a, b]$ 连续，且 $f(a)f(b) < 0$ ，则 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 至少有一个根。必须同时说明 continuous 与 change of sign；变号不能单独证明根的唯一性。

指定小数位的验证 若声称 x_0 是精确到 d 位小数的根，应考查使其舍入为 x_0 的边界：

$$x_0 \pm \frac{1}{2} 10^{-d}$$

在两端验证连续与异号，可证明至少有一根舍入为该数；若需指认唯一根，还应使用题设的唯一性条件。

区间二分法 (Bisection) 从异号区间 $[a_n, b_n]$ 出发，令

$$m_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

若 $f(a_n)f(m_n) < 0$ ，取新区间 $[a_n, m_n]$ ；否则在 $f(m_n) \neq 0$ 时取 $[m_n, b_n]$ 。重复操作并保持区间端点异号。

$$\text{区间宽度 } w_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

若取最终中点为近似根，误差不超过最终区间半宽；舍入前应核对题目要求的位数。

线性插值法 (Linear interpolation) 连接曲线两 endpoints $(a, f(a))$ 、 $(b, f(b))$ 的弦，以弦的横轴截距近似零点：

$$x_{\text{int}} = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

也可写为 $x_{\text{int}} = [af(b) - bf(a)]/[f(b) - f(a)]$ ，要求 $f(b) \neq f(a)$ ；如需迭代，则用函数值符号更新异号端点。

牛顿-拉普森法 (Newton-Raphson) 在 $(x_n, f(x_n))$ 作切线，以切线与 x 轴交点作为下一次近似值：

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

需 f 可导且 $f'(x_n) \neq 0$ 。初始值欠佳可能不收敛、跳至另一根或收敛很慢；连续迭代值近似相同并非严格误差证明。

辨析 二分法依赖连续与异号；线性插值依据割线；牛顿法依据切线。写过程时应明示初始区间/初值、迭代公式、必要的中间值及精度。

04 坐标系统与参数曲线

教材 P.46-58

Coordinate Systems

参数方程 曲线由 $x = f(t)$, $y = g(t)$ 描述。消去 t 得 Cartesian equation (直角坐标方程)，同时应保留原参数对轨迹范围的限制。

参数求导及切线法线 当 $dx/dt \neq 0$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

切线 $y - y_0 = m_t(x - x_0)$ ；若 $m_t \neq 0$ 且有限，法线斜率 $m_n = -1/m_t$ 。水平切线对应竖直线，竖直线对应水平法线。

抛物线 (Parabola) 标准式、参数式与要素 ($a \neq 0$):

$$y^2 = 4ax, \quad x = at^2, \quad y = 2at$$

$$\text{焦点 } F(a, 0), \quad \text{准线 } x = -a$$

顶点为 $(0, 0)$ ，对称轴为 x 轴；抛物线上一点到焦点与准线的距离相等。参数点 $P(at^2, 2at)$ 的切线、法线：

$$\text{切线: } ty = x + at^2$$

$$\text{法线: } y = -tx + 2at + at^3$$

其中 $t = 0$ 时切线为 $x = 0$ ，法线为 $y = 0$ 。

直角双曲线 (Rectangular hyperbola) 教材采用 $c > 0, t \neq 0$:

$$xy = c^2, \quad x = ct, \quad y = \frac{c}{t}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{c^2}{x^2} = -\frac{1}{t^2}$$

关于原点中心对称；两条渐近线 $x = 0$ 、 $y = 0$ 。在 $P(x_0, y_0)$ ($x_0 y_0 = c^2$)，

$$\text{切线: } \frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 2$$

$$\text{法线: } y - y_0 = \frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$$

辨析 解析几何主流程：参数/直角坐标互化 $\rightarrow$ 求切线斜率 $\rightarrow$ 求法线 $\rightarrow$ 联立交点；须注意参数非零及对应点的坐标。

05 矩阵

教材 P.59-67

Matrices · operations / determinant / inverse

矩阵的类型 $m \times n$ 表示 m 行 n 列； $n \times n$ 是方阵。零矩阵 O 所有元素为 0；单位矩阵 I_n 主对角为 1，其余为 0。

加减及数乘 只有**同型矩阵**才能加减，按对应元素运算； kA 把 A 的每个元素乘 k 。

矩阵乘法 若 $A_{m \times n}$ 、 $B_{n \times p}$ ，则 AB 存在且大小为 $m \times p$:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

即“第 i 行点乘第 j 列”。一般 $AB \neq BA$ ，甚至 BA 可能不存在；乘法满足结合律及对加法的分配律。

$$A(BC) = (AB)C$$

$$A(B+C) = AB+AC, \quad (A+B)C = AC+BC$$

单位矩阵满足 $AI = IA = A$ (维数相容时)。

二阶行列式 (Determinant) 对 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

$$\det M = ad - bc$$

$\det M = 0$ 为 *singular matrix* (奇异矩阵)，无逆； $\det M \neq 0$ 为 *non-singular matrix*，可逆。

二阶逆矩阵 对 $\det M \neq 0$:

$$M^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

逆矩阵唯一且 $MM^{-1} = M^{-1}M = I$ 。可逆矩阵 A, B 有

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

解矩阵方程时，**左乘与右乘不可交换**； $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$ ， $XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}$ (A 可逆)。

06 矩阵与几何变换

教材 P.68-88

Transformations · basic / advanced

二维线性变换 坐标向量经矩阵 M 映射为像 (image):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

M 的第一列就是基向量 $(1, 0)^T$ 的像；第二列是 $(0, 1)^T$ 的像。图形的各顶点分别左乘同一变换矩阵。

面积比例 对任意二维线性变换，

$$\frac{A_{\text{after}}}{A_{\text{before}}} = |\det M|$$

行列式为负时改变定向； $\det M = 0$ 时面积退化为 0。一般线性变换**不存在统一的长度比例**。

四种标准反射 (关于过原点的直线)

关于 x 轴	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
关于 y 轴	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
关于 $y = x$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
关于 $y = -x$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

旋转 (原点为中心) 逆时针取正角，顺时针取负角：

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$R_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta}, \quad R_\theta^n = R_{n\theta}$$

非整周旋转仅原点不动；整周旋转为恒等变换。转 180° 时 $M = -I$ ，所有过原点直线均映回自身。

放大与拉伸 原点为中心、倍率 k 的等比放大为 kI ；两个坐标方向分别拉伸倍率 p, q ：

$$E_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \quad S_{p,q} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

长度统一变为 $|k|$ 倍（仅对等比放大），面积变为 k^2 倍；分方向拉伸面积因子为 $|pq|$ 。

不动点与不动线 不动点（invariant/fixed point）满足

$$M(x)y = (x)y \Leftrightarrow (M - I)(x)y = 0$$

过原点直线保持自身（invariant line）是指该直线上的像仍落在同一直线上；相应方向向量 $v \neq 0$ 满足 $Mv = \lambda v$ （若要求直线整体映为自身，须 $\lambda \neq 0$ ）。因此“不动线”不等于“线上每点均不动”。

反射的不动结构 关于 x 轴的反射，其不动点恰为 x 轴上的点；关于 y 轴的反射，其不动点恰为 y 轴上的点。关于 $y = x$ 或 $y = -x$ 反射，固定点分别在对应的反射轴上。四种反射均有两条过原点的不动直线：坐标轴反射为 x, y 两轴；斜线反射为 $y = x, y = -x$ 。

连续变换（Composition） 先 A 后 B 对应 BA ；先 A 、再 B 、再 C 对应 CBA 。矩阵乘法次序与操作说明顺序相反。

逆变换（Inverse transformation） $\det M \neq 0$ 时， M^{-1} 将像还原为原像，且 $M^{-1}M = I$ ；变换面积因子为 $1/|\det M|$ 。若已知组合变换，应在正确一侧乘逆矩阵以消去对应因子。

辨析 标准反射、旋转及对角拉伸均为线性变换；平移不属于本章用 2×2 矩阵表示的原点固定线性变换。

07 数列求和

教材 P.89–96

Series · Sigma notation / standard sums

Σ 求和记号 $\sum_{r=m}^n f(r)$ 表示对整数 $r = m, m+1, \dots, n$ 逐项求和，项数为 $n - m + 1$ ($m \leq n$)。

线性性与常数项 $\sum (af(r) + bg(r)) = a \sum f(r) + b \sum g(r)$ ，且

$$\sum_{r=m}^n c = c(n - m + 1)$$

三个基本公式 对非负整数 n ：

$$\sum_{r=1}^n r = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{r=1}^n r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{r=1}^n r^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

非 1 起点与组合式 对 $m \geq 1$ ：

$$\sum_{r=m}^n f(r) = \sum_{r=1}^n f(r) - \sum_{r=1}^{m-1} f(r)$$

多项式求和先按**幂次拆开**，对每一项套用上述公式；含参数上限（如 $2n$ ）时需把上限作为整体代入。

常用恒等改写 $\sum_{r=1}^n (ar^2 + br + c) = a \sum r^2 + b \sum r + cn$ ；较复杂乘积先展开再合并同类项。

辨析 起点为 m 时减去的是 1 到 $m-1$ ，不是到 m 。

08 数学归纳法证明

教材 P.97–111

Proof · induction / recurrence / matrices

归纳法四步结构 证明命题 $P(n)$ 对所有整数 $n \geq n_0$ 成立：

- **Basis step**：验算初始值 $P(n_0)$ 。
- **Assumption step**：假设 $P(k)$ 成立 ($k \geq n_0$)。
- **Inductive step**：使用假设推出 $P(k+1)$ 。
- **Conclusion step**：说明由初始情形与归纳步骤，对所有规定的 n 命题成立。

求和式的归纳 核心是把 $k+1$ 项与 k 项建立关系：

$$\sum_{r=1}^{k+1} u_r = \underbrace{\sum_{r=1}^k u_r}_{\text{使用归纳假设}} + u_{k+1}$$

把原式中的前 k 项替换为假设中的闭式，再整理成 $k+1$ 对应的形式。

整除性证明 设目标为 $d \mid F(n)$ 。已知 $d \mid F(k)$ ，若能推出

$$d \mid (F(k+1) - F(k)),$$

则 $d \mid F(k+1)$ 。可利用提取公因式、指数拆分与余数同余。

一阶递推 若 $u_{n+1} = G(u_n, n)$ ，在假设 u_k 等于待证通式后，将其代入递推式验证 u_{k+1} 。

二阶递推 若 $u_{n+2} = G(u_{n+1}, u_n, n)$ ，通常应验证两个相邻起始项，并同时假设 $P(k), P(k+1)$ ，进而得到 $P(k+2)$ 。

矩阵结论的归纳 对矩阵幂，

$$A^{k+1} = A^k A$$

把假设中的矩阵闭式与 A 相乘后逐元素化简；对于可逆 A ， $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ 。矩阵因子左右顺序不可随意对换。

常用英文证明句式 “Assume the statement is true for $n = k$.”；“Hence it is true for $n = k+1$.”；“Therefore it is true for all $n \geq n_0$ by mathematical induction.”

书面证明规范 初始值需与通式的适用范围一致；归纳假设写清对象与条件；推导结束后**必须明确写出 conclusion**，而不仅是得到某一代数等式。

编校说明 本清单严格保留原教材八大知识板块的编排，并对少量易混淆的符号作数学规范化：单位矩阵满足 $IA = AI = A$ ；二维面积因子取 $|\det M|$ ；一般线性变换不能仅由行列式确定统一长度倍数。未收录原书例题、习题与历年真题。

CIE FP2 高等纯数知识清单

A4 • 双栏 • 教师速查

Further Pure Mathematics 2 | 六章核心概念、公式与适用条件 | 不含例题、习题及解答

01 双曲函数

原书 5-11 页

1.1 指数定义与基本性质

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x},$$

$$\operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x}, \quad \coth x = \frac{1}{\tanh x}.$$

奇偶性： $\sinh, \tanh, \coth, \operatorname{cosech}$ 为奇函数； $\cosh, \operatorname{sech}$ 为偶函数。
 $\cosh x \geq 1$ ，在 $x = 0$ 处取最小值 1。

图像与值域： $\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 单调递增； $\cosh$ 为左右对称的悬链线；
 $\tanh x \in (-1, 1)$ ，渐近线 $y = \pm 1$ ； $\operatorname{sech} x \in (0, 1]$ ； $\coth x$ 在 $x = 0$ 处无定义。

1.2 双曲恒等式与 Osborn's Rule

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x, \quad \coth^2 x - \operatorname{cosech}^2 x = 1$$

$$\sinh(a \pm b) = \sinh a \cosh b \pm \cosh a \sinh b,$$

$$\cosh(a \pm b) = \cosh a \cosh b \pm \sinh a \sinh b.$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x,$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$= 1 + 2 \sinh^2 x = 2 \cosh^2 x - 1,$$

$$\tanh 2x = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}.$$

记忆法： Osborn's Rule 借助三角恒等式类比双曲恒等式；涉及两个 $\sin$ 因子相乘的项需调整符号。严谨推导仍以指数定义为准。

1.3 反双曲函数及实数定义域

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1,$$

$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

arcosh 对应 $\cosh$ 在 $x \geq 0$ 上的反函数； arsinh 与 artanh 分别为 $\sinh$ 和 $\tanh$ 的反函数。

解双曲方程： 可令 $u = e^x > 0$ 化为关于 u 的代数方程；或用 $\operatorname{arsinh}/\operatorname{arcosh}/\operatorname{artanh}$ 取反函数。

注意： 求解 $u = e^x$ 时必须舍去 $u \leq 0$ 的根； $\cosh$ 不是在整个实数域上一一对应。

02 矩阵进阶

原书 14-22 页

2.1 特征值、特征向量

非零向量 v 满足 $Av = \lambda v$ 时， λ 是特征值， v 是对应特征向量。

$$\det(A - \lambda I) = 0, \quad (A - \lambda I)v = 0$$

求解顺序： 特征方程 $\rightarrow$ 特征值 $\lambda \rightarrow$ 每个 λ 的非零零空间向量。特征向量可乘任意非零常数。

特殊矩阵： 上(下)三角矩阵的特征值为主对角线元素(计重数)； $\det A \neq 0$ 当且仅当零不是特征值。

2.2 特征值的代数运算

若 $Av = \lambda v$ ，则

$$(A + kI)v = (\lambda + k)v, \quad A^n v = \lambda^n v$$

任意多项式 p 满足 $p(A)v = p(\lambda)v$ 。若 A, B 有同一特征向量 v ，对应特征值 λ, μ ，则 $A + B$ 、 AB 在此向量上分别对应 $\lambda + \mu, \lambda\mu$ 。

注意： 不同矩阵的特征值不能不加条件地逐项相加或相乘；必须核验共同特征向量。

2.3 Cayley-Hamilton 定理

若特征多项式 $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ ，则

$$p(A) = 0$$

若 $p(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda + c_0$ ， $c_0 \neq 0$ ，可求

$$A^{-1} = -\frac{A^{n-1} + c_{n-1}A^{n-2} + \dots + c_1I}{c_0}.$$

常见用途： 将高次矩阵幂降阶；由特征方程构造 A^{-1} ；矩阵多项式恒等变换。

2.4 对角化及矩阵高次幂

将 n 个线性无关特征向量依次作为 P 的列，与之对应的特征值排列在 D 的主对角线：

$$AP = PD, \quad A = PDP^{-1}$$

$$A^m = PD^mP^{-1}, \quad D^m = \operatorname{diag}(\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m)$$

判定： 可对角化 $\iff$ 有 n 个线性无关特征向量。 n 个不同特征值足以保证可对角化，但并非必要条件。

注意： P 的第 j 列对应 D 的第 j 个对角元素；顺序必须一致。

2.5 线性方程组的几何意义

$Ax = b$ 对应空间平面组：

- $\det A \neq 0$ ：唯一解，三个平面交于一点。
- $\det A = 0$ ：可能无穷多解（如交于一直线），也可能无解（如不相容的平面组）。

只用行列式为零，不能区分无解和无穷多解；还需检验方程组是否相容。

03 微分

原书 30-40 页

3.1 隐函数一、二阶导数

$F(x, y) = 0$ 中把 y 看作 x 的函数，逐项用链式法则。若 $F_y \neq 0$ ，

$$y' = -\frac{F_x}{F_y}, \quad y'' = -\frac{F_{xx} + 2F_{xy}y' + F_{yy}(y')^2}{F_y}.$$

实操： 二次求导可直接从第一次求导尚未解出 y' 的等式继续，常可减少代数展开；要求点上的导数时最后再代入坐标。

3.2 参数方程求导

对 $x = x(t)$ ， $y = y(t)$ 且 $x'(t) \neq 0$ ：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(dy/dx)}{dx/dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^3}$$

驻点： $dy/dx = 0$ 且分母不为零；以 d^2y/dx^2 的符号分类（负为局部极大，正为局部极小）。

3.3 双曲函数的导数

$$\begin{aligned} (\sinh x)' &= \cosh x, & (\cosh x)' &= \sinh x, \\ (\tanh x)' &= \operatorname{sech}^2 x, & (\coth x)' &= -\operatorname{cosech}^2 x, \\ (\operatorname{sech} x)' &= -\operatorname{sech} x \tanh x, \\ (\operatorname{cosech} x)' &= -\operatorname{cosech} x \coth x. \end{aligned}$$

复合函数 $f(u(x))$ 需补乘 $u'(x)$ 。

3.4 反双曲与反三角导数

$$\begin{aligned}(\operatorname{arsinh} x)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \\(\operatorname{arcosh} x)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (x > 1), \\(\operatorname{artanh} x)' &= \frac{1}{1 - x^2} \quad (|x| < 1), \\(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \\(\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \\(\arctan x)' &= \frac{1}{1 + x^2}.\end{aligned}$$

推导机制：设 $y = f^{-1}(x)$ ，改写 $f(y) = x$ ，隐函数求导，再以 x 表示结果；需注意反函数主值区间。

3.5 麦克劳林展开 (Maclaurin)

当函数可由原点附近的幂级数表示时，其系数由各阶导数给出：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

常见展开（省略号表示后续幂次）：

$$\begin{aligned}e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots, \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots, \\ \arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots, \\ \sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \\ \cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \\ \tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots, \\ \operatorname{arsinh} x &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \dots.\end{aligned}$$

收敛区间： $\ln(1+x)$ 为 $-1 < x \leq 1$ ； $\arctan x$ 在 $|x| \leq 1$ 收敛； $\sin, \cos, e^x, \sinh, \cosh$ 对所有实数收敛。其余展开须检查适用区间。

方法：逐次求导、复合代换、已有级数微分或积分。奇函数仅有奇次幂，偶函数仅有偶次幂。

3.6 由微分方程求展开系数

已知 $y' = F(x, y)$ 或含 y'' 的关系与初值，逐次对方程求导，在 $x = 0$ 代入以确定 $y(0), y'(0), y''(0), \dots$ ：

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + \frac{x^2}{2!}y''(0) + \dots$$

无需先求出 $y = f(x)$ 的显式表达式。

04 积分

原书 46-55 页

4.1 三角换元与双曲换元

设 $a > 0$ ，识别根式/二次式结构：

- $a^2 - x^2$ ： $x = a \sin \theta$ ；或 $x = a \tanh u$ 。
- $a^2 + x^2$ ： $x = a \tan \theta$ ；或 $x = a \sinh u$ 。
- $x^2 - a^2$ ： $x = a \sec \theta$ ；或 $x = a \cosh u$ （该双曲换元覆盖 $x \geq a$ ）。

恒等变换：分别利用 $1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$ 、 $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ 、 $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ 。

4.2 双曲函数的积分速查

$$\begin{aligned}\int \sinh x \, dx &= \cosh x + C, \\ \int \cosh x \, dx &= \sinh x + C, \\ \int \tanh x \, dx &= \ln(\cosh x) + C, \\ \int \coth x \, dx &= \ln|\sinh x| + C, \\ \int \operatorname{sech}^2 x \, dx &= \tanh x + C, \\ \int \operatorname{cosech}^2 x \, dx &= -\coth x + C, \\ \int \operatorname{cosech} x \, dx &= \ln\left|\tanh \frac{x}{2}\right| + C, \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} &= \operatorname{arsinh} \frac{x}{a} + C \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C.\end{aligned}$$

工具：复合积分配合 $u = \sinh x$ 、 $u = \cosh x$ 或 $u = e^x$ ；对 $1/\sinh x$ 等可先写成指数式再有理分式化。

4.3 积分递推 (Reduction Formula)

定义 $I_n = \int f_n(x) \, dx$ ，目标是在代数整理后得到 I_n 与 I_{n-1} 或 I_{n-2} 的关系，逐级降低次数。

$$I_n = \int x^n e^x \, dx, \quad \boxed{I_n = x^n e^x - n I_{n-1}} \quad (n \geq 1).$$

令 $S_n = \int \sin^n x \, dx$ 、 $T_n = \int \tan^n x \, dx$ ，则

$$\begin{aligned}S_n &= -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} S_{n-2}, \\ T_n &= \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - T_{n-2} \quad (n \geq 2).\end{aligned}$$

常用起点：分部积分 $\int u \, dv = uv - \int v \, du$ ，或由 $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ 、 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ 直接降幂，也可对题目给定乘积求导。

注意：处理递推时先整理含 I_n 的两边；不定积分的 C 最终统一补一次。定积分须同时处理上下限带来的边界项。

4.4 矩形面积与积分上下界

$\Delta x = (b-a)/n$ ， $x_k = a + k\Delta x$ 。若 f 在 $[a, b]$ 上单调递增：

$$\begin{aligned}L_n &= \Delta x \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k), \\ U_n &= \Delta x \sum_{k=1}^n f(x_k),\end{aligned}$$

$$\boxed{L_n \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq U_n}.$$

若 f 单调递减，则左右端点所得上、下界互换；当分割宽度趋于零，上下矩形和均趋向积分值。

求和反用：用曲线下的积分夹住离散项之和；对非负递减函数，还可借积分比较判断无穷级数的收敛性。

4.5 弧长 (Arc Length)

$$\begin{aligned}\text{直角坐标: } s &= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx, \\ \text{参数方程: } s &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} \, dt, \\ \text{极坐标: } s &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \, d\theta.\end{aligned}$$

技巧：常以双曲恒等式将根号化成 $\cosh x$ 或 $\sinh x$ ；参数式中的导数是相对于参数 t 的。

4.6 旋转曲面的表面积

绕 x 轴与 y 轴分别取半径 $|y|$ 、 $|x|$ ，总表面积为 $S = \int 2\pi(\text{半径}) ds$ ：

$$\text{绕 } x \text{ 轴: } S_x = 2\pi \int_a^b |y| \sqrt{1 + (y')^2} dx,$$

$$\text{绕 } y \text{ 轴: } S_y = 2\pi \int_a^b |x| \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

参数方程以 $ds = \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2} dt$ 代入；区间内若半径符号变化，需要分段处理。

05 复数

原书 69-77 页

5.1 指数形式、欧拉公式与模辐角

$$z = a + bi = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta},$$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan \theta = \frac{b}{a},$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

辐角：判定 θ 时要结合所在象限； $\arg(z)$ 相差 $2k\pi$ 表示同一复数。

5.2 棣莫弗定理 (de Moivre)

$$[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

通常 n 为整数； $n < 0$ 时需 $z \neq 0$ 。用 $(\cos \theta + i \sin \theta)^n$ 的二项展开，比较实部、虚部推导多倍角公式：

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta,$$

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta,$$

$$\tan 3\theta = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}, \quad t = \tan \theta.$$

降幂：令 $z = e^{i\theta}$ ，则

$$\cos n\theta = \frac{z^n + z^{-n}}{2}, \quad \sin n\theta = \frac{z^n - z^{-n}}{2i}$$

$$\cos^4 \theta = \frac{3 + 4 \cos 2\theta + \cos 4\theta}{8},$$

$$\sin^4 \theta = \frac{3 - 4 \cos 2\theta + \cos 4\theta}{8}.$$

用途：在三角幂和倍角之间转换；为三角积分及某些多项式方程提供化简途径。

5.3 复数形式的数列求和

$$\sum_{k=0}^{N-1} q^k = \frac{1 - q^N}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

对 $q = \rho e^{i\theta}$ 先用等比数列，再取 Re 与 Im ：

$$\sum_{k=0}^{N-1} \rho^k \cos(k\theta) = \text{Re} \frac{1 - q^N}{1 - q},$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \rho^k \sin(k\theta) = \text{Im} \frac{1 - q^N}{1 - q}.$$

若公比为 $e^{i\theta}$ ，可进一步得到

$$\sum_{k=0}^{N-1} \cos k\theta = \frac{\sin(N\theta/2) \cos((N-1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)},$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \sin k\theta = \frac{\sin(N\theta/2) \sin((N-1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}.$$

以上闭式要求 $\sin(\theta/2) \neq 0$ ；若 $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ ，直接求和。

5.4 复数方程与单位根

设 $w = \rho e^{i\phi}$ 且 $\rho > 0$ ， $z^n = w$ 有 n 个不同根：

$$z_k = \rho^{1/n} e^{i(\phi + 2k\pi)/n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

单位根 (Roots of Unity)： $z^n = 1$ 的根为

$$\omega_k = e^{2\pi i k/n}, \quad k = 0, \dots, n-1$$

这些点等间隔分布于单位圆，连接相邻点形成正 n 边形。若 $\omega^n = 1, \omega \neq 1$ ，则

$$1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = 0.$$

注意：角度必须写成 $\phi + 2k\pi$ ，否则会漏根；模长取正的 n 次根，再分配所有辐角。

06 微分方程

原书 82-91 页

6.1 一阶线性方程与积分因子

可分离变量：整理为 $g(y) dy = f(x) dx$ 后两边积分，注意分离时若除以了含 y 的表达式，需单独检查零解。

对于一阶线性方程

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \quad \boxed{\mu(x) = e^{\int P(x) dx}}$$

乘以积分因子后 $(\mu y)' = \mu Q$ ，故

$$\boxed{y = \frac{1}{\mu(x)} \left(\int \mu(x) Q(x) dx + C \right)}$$

程序：化标准式 $\rightarrow$ 识别 $P(x) \rightarrow$ 求 $\mu \rightarrow$ 整体积分 $\rightarrow$ 利用初值定 C 。

6.2 二阶常系数齐次方程

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad a \neq 0, \quad am^2 + bm + c = 0$$

按辅助方程的根确定通解：

- **两个不同实根** m_1, m_2 ： $y = Ae^{m_1 x} + Be^{m_2 x}$ 。
- **实重根** m ： $y = (A + Bx)e^{mx}$ 。
- **共轭复根** $p \pm iq$ ： $y = e^{px}(A \cos qx + B \sin qx)$ 。

判别式： $b^2 - 4ac$ 分别为正、零、负时，对应以上三类根。

6.3 二阶非齐次方程

$$ay'' + by' + cy = f(x), \quad \boxed{y = \text{CF} + \text{PI}}$$

其中 CF 为对应齐次方程的通解 (Complementary Function)，PI 为非齐次方程的任一特解 (Particular Integral)。常见待定系数试探形式：

右端 $f(x)$	试探 y_{PI}
常数	常数 K
一次/二次多项式	同次数一般多项式
Ce^{kx}	Ae^{kx}
$C \cos \omega x + D \sin \omega x$	$A \cos \omega x + B \sin \omega x$

共振/重复：若试探项已属于 CF，就乘以 x ；若仍重复则乘以 x^2 。对于根 k 的重数 s ，指数型试探项乘 x^s 。将试探解代回原式比较系数。

完整步骤：求 CF $\rightarrow$ 构造并计算 PI $\rightarrow$ 相加为总通解 $\rightarrow$ 若已知 $y(x_0), y'(x_0)$ ，代入确定积分常数。

6.4 换元法化简微分方程

因变量换元：根据给出的 $u = g(x, y)$ 求 u' ，将原式改写成关于 u 的一阶线性方程或可分离方程；解出 u 后回代并检查分支。

自变量换元：设 $x = g(t)$ 、 $y(x) = Y(t)$ ， $g'(t) \neq 0$ ，则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y'(t)}{g'(t)},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{Y''(t)g'(t) - Y'(t)g''(t)}{[g'(t)]^3}.$$

核心：所有一阶、二阶导都必须同时换算，先完成代换和系数整理，再按线性方程或常系数二阶方程求解。

使用说明：本清单按原教辅六章知识组织，仅保留知识与公式，适合作为课前梳理、授课板书提纲与考前速查。反函数、换元与级数均需核验定义域和适用条件；数学公式符号采用统一规范写法。